Beiträge zur Fachwerkstheorie.

Von der

Königl. Technischen Hochschule zu München

zur

Erlangung der Würde eines

Doktors der technischen Wissenschaften

(Doktor-Ingenieurs)

genehmigte Dissertation.

Vorgelegt von

Diplomingenieur Dr. phil. Heinrich Egerer
aus München.

ACAD. LANDBAU BIBL.

Referent:
Professor Dr. A. Föppl.

Korreferent:
Professor W. Dietz.

Tag der mündlichen Prüfung: 19. Dezember 1907.

München 1908.
Kgl. Hofbuchdruckerei Kastner & Callwey.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555409_0014

§ 1.

Einleitung.

Die nachfolgenden Zeilen bedeuten den Versuch, den inneren organischen Zusammenhang der verschiedenen Methoden der graphischen Statik zur Lösung der ihr gestellten Aufgaben mit Hilfe allgemeiner statischer Betrachtungen, wie solche vor allem die Vektorenrechnung gestattet, auch äusserlich sichtbar zu gestalten. Das Ziel eines solchen Versuches wird also sein, einen möglichst innigen Zusammenhang dieser verschiedenen Lösungsmethoden herzustellen.

Wer sich bestrebt, in den Geist solcher Methoden zu dringen, wer auch scheinbare Nebensächlichkeiten der Mühe der Betrachtung wert erachtet, der wird gar bald allgemeine Gesichtspunkte auffinden, die er mutatis mutandis auf alle Probleme mit Erfolg anwenden kann. Dass bei der Konstruktion von Kräfteplänen zum Schluss, bei den letzten Knotenpunkten, sich Kontrollen ergeben, fällt meist nicht weiter auf. Und doch wäre hier eine Reihe von Fragen zu stellen: Gibt es immer solche Kontrollen? Wie viele? Warum? Was für eine statische Bedeutung haben sie? Wie lassen sich solche Kontrollgleichungen praktisch verwerten?

2. Von solchen scheinbar nebensächlichen Dingen ausgehend und nach ihrer Bedeutung und praktischen Verwertung fragend bin ich veranlasst worden, die in den nachstehenden Zeilen behandelte allgemeine Methode zur Lösung statischer Aufgaben vorzuschlagen. Ihr Gedankengang, ihr allgemeiner zunächst, ist der: Man hat durch die Natur statischer Aufgaben einfache Gleichungen genug zur Ver-

fügung, um alle gewünschten unbekannten Grössen zu ermitteln.

Solche Gleichungen, die bei allen statischen Problemen auftreten, sind vor allem die Kontrollgleichungen. Diese in Verbindung mit dem Superpositionsprinzip: Die resultierende Wirkung ist gleich der graphischen Summe der Einzelwirkungen, bilden den Inhalt der vorgeschlagenen Methode zur Lösung von Statikaufgaben.

§ 2.

Das Superpositionsprinzip.

1. Dieses Prinzip soll in den nächsten Zeilen soweit bewiesen werden, als es für die nachfolgenden Untersuchungen notwendig ist. Gegeben sei ein aus materiellen Punkten zusammengesetztes und als im ganzen oder in Teilen starr angenommenes Gebilde. Die Zahl n der dasselbe definierenden materiellen Punkte sei unbeschränkt, jedenfalls aber diskret. Es habe p Freiheitsgrade, d. h. um seine jeweilige Lage gegenüber einer bekannten Anfangslage genau zu fixieren, braucht man p Zahlen. So gross muss dann auch die Anzahl der gegenseitig von einander unabhängigen Beziehungen zwischen den an dem Gebilde angreifenden äusseren Kräften sein, wenn dieses im Gleichgewicht ist.

Zwischen allen an den n einzelnen materiellen Punkten des Gebildes angreifenden Kräften aber kann man im Fall des Gleichgewichtes desselben, da ja jeder einzelne materielle Punkt im Gleichgewicht sein muss, kn gegenseitig von einander unabhängige Beziehungen aufstellen. Die Anzahl k der gegenseitig von einander unabhängigen Komponenten je einer Kraft wird 1 bezw. 2 oder 3, wenn das Gebilde ein lineares bezw. ebenes oder räumliches ist. Es ist also möglich, kn unbekannte Grössen, die mit dem untersuchten Gebilde in Beziehung stehen und daher in jene Gleichungen eintreten, zu ermitteln. In den praktisch vorkommenden Fällen werden das unbekannte Kräfte sein, speziell Stabspannungen und Auflagerkräfte.

An dem untersuchten Gebilde greifen äussere Kräfte an und innere. Zwischen den äusseren Kräften müssen die oben erwähnten p Gleichgewichtsbedingungen bestehen. Dieselben sind naturgemäss, hervorgegangen aus der Tatsache des Gleichgewichts jedes einzelnen materiellen Punktes, in jenen kn Gleichungen implizit schon enthalten. Für die inneren Kräfte allein bleiben demnach nur mehr $kn—p$ Gleichungen übrig. $kn—p$ innere unbekannte Kräfte dürfen also an dem betreffenden Gebilde angreifen, nicht mehr und nicht weniger, wenn die Aufgabe statisch bestimmt sein soll. Freilich wird die Lösung illusorisch, wenn die Zahl der materiellen Punkte über die Massen gross ist. Aber in diesem Fall verlangt auch niemand nach den von Punkt zu Punkt wirkenden inneren Kräften. Praktisch werden diese inneren statisch bestimmten Kräfte doch nur dann erfragt, wenn sie als Stabspannungen auftreten. Daher die Voraussetzung, die Zahl der Punkte sei diskret.

2. Es sollen nun als statisch bestimmte Aufgaben über aus n materiellen Punkten zusammengesetzte und als ganz oder in Teilen starr angenommene Gebilde solche bezeichnet werden, die durch kn lineare Gleichungen die gesuchten kn unbekannten Grössen ermitteln lassen. Dass die gesuchten Grössen Kräfte sind, ist nicht notwendig, indes gestattet die Methode der folgenden Untersuchung und der Bereich ihrer Anwendung, sie stets als solche anzusprechen.

Nach der gegebenen Definition sind Aufgaben über sogenannte „statisch unbestimmte Fachwerke“ auch als statisch bestimmt anzusehen, wenn die die statische Unbestimmtheit des Fachwerks verursachende Grösse, z. B. der Horizontalschub eines Zweigelenkbogens, bekannt ist.

Die Aufgabe, die Verschiebung der einzelnen Knotenpunkte eines ebenen oder räumlichen Fachwerkes aufzusuchen, wenn man alle Längenänderungen kennt, erfordert die Lösung von kn linearen Gleichungen mit kn Unbekannten, d. s. je k Komponenten von n Knotenpunktsverschiebungen.

Von diesen Komponenten sind, entsprechend der Zahl p

der Freiheitsgrade des Gebildes, im voraus p bekannt: beim Fachwerkträger, oder willkürlich anzunehmen: beim freien Fachwerk. Nach der vorangegangenen Erklärung ist diese Aufgabe eine statisch bestimmte und mit der in den folgenden Zeilen vorgeschlagenen Methode stets lösbar.

3. Voraussetzung für die folgende Untersuchung ist also: Die Aufgabe, die an dem untersuchten Gebilde angreifenden unbekannten Kräfte aufzusuchen, ist statisch bestimmt.

Die Sätze der Statik geben dann genau so viel Gleichungen als unbekannte Kräfte bezw. Kraftbestimmungsstücke auftreten. Deren Zahl sei m. Nach Voraussetzung sind diese Gleichungen alle linear in den Unbekannten. Seien diese $S_1, S_2, \ldots S_m$ genannt, so hat man im allgemeinsten Fall für sie die m Gleichungen

$$(1)\quad \begin{aligned} a_{11} S_1 + a_{12} S_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{1m} S_m + P_1 &= 0, \\ a_{21} S_1 + a_{22} S_2 + \ldots\ldots\ldots + a_{2m} S_m + P_2 &= 0, \\ \text{— — — — — — — — — — — — — —} & \\ a_{m1} S_1 + a_{m2} S_2 + \ldots\ldots + a_{mm} S_m + P_m &= 0. \end{aligned}$$

$P_1, P_2, \ldots . P_m$ sind die von den gegebenen angreifenden Kräften $\mathfrak{P}_i$ *) berührenden Beiträge. Die S_i werden meist als Stabspannungen auftreten; es können aber auch lauter äussere Kräfte sein, etwa Auflagerkräfte, auf ein starres Gebilde einwirkend, das verbunden ist mit einem zweiten starren Gebilde. Es sollen aber im folgenden über die S_i gar keine anderen Voraussetzungen gemacht werden, als dass es eben unbekannte Kräfte bezw. Komponenten solcher sind.

Von diesen m Gleichungen sei vorausgesetzt: Die Determinante

$$D = (a_{11}\, a_{22} \ldots\ldots a_{mm})$$

des Gleichungssystemes verschwindet nicht.

Trifft dies zu, dann ist der sogenannte Ausnahmefall ausgeschlossen, und immer ein System von endlichen Lösungen

$$S_1, S_2, \ldots\ldots S_m$$

möglich.

*) Der Index i soll fortan variabel sein, k konstant.

Diese Lösungen S_i der unbekannten Kräfte sind alle linear in den P_i. Hat man also für ein System gegebener Kräfte $\mathfrak{P}'_i$, das zu den obigen Gleichungen (1) die Beiträge

$$P'_1, P'_2, \ldots . P'_m \text{ statt } P_1, P_2, \ldots . P_m$$

liefert, als Lösungen $S'_1, S'_2, \ldots S'_m$, und für ein zweites System von Kräften $\mathfrak{P}''_i$ mit den Beiträgen

$$P''_1, P''_2, \ldots . P''_m \text{ statt } P_1, P_2, \ldots . P_m$$

die Lösungen $S''_1, S''_2, \ldots . S''_m$, so werden unter dem Einfluss der beiden gleichzeitig angreifenden Systeme, da sie die Beiträge

$$P_i = P'_i + P''_i$$

liefern, nach bekannten Sätzen der Lehre von den Determinanten die gesuchten Kräfte sein

(2) $$S_i = S'_i + S''_i.$$

Superponieren sich also die Ursachen, dann auch die Wirkungen.

Das ist nun allerdings nicht allgemein, sondern unter den angegebenen recht wesentlichen Einschränkungen bewiesen. Wäre auch vollkommen genügend für die Untersuchungen, die man mit Hilfe dieses Prinzipes am ebenen oder räumlichen Fachwerk anzustellen pflegt. Gleichwohl soll dasselbe noch eine Erweiterung erfahren für verschiedene Zwecke.

4. Um eine präzise und gleichzeitig kurze Ausdrucksweise dieses Prinzipes im vorliegenden Fall zu gewinnen, sei definiert: ($\mathfrak{P}$) bezeichne den Verein der an dem untersuchten Gebilde angreifenden gegebenen Kräfte $\mathfrak{P}_i$, das „Kräftebild“ ($\mathfrak{P}$), ($\mathfrak{S}$) den Verein der am untersuchten Gebilde angreifenden gegebenen Kräfte $\mathfrak{P}_i$ und gesuchten Kräfte $\mathfrak{S}_i$.

Dabei sollen die $\mathfrak{S}$ durch die $\mathfrak{P}$ hervorgerufen, also von ihnen abhängig sein, linear natürlich. Als allgemeinster Fall ist vorausgesetzt, dass an jedem Knotenpunkt beliebig viele $\mathfrak{P}$ und beliebig viele $\mathfrak{S}$ angreifen können. Letztere sollen nur statisch bestimmbar sein. Dann lautet im vorliegenden Fall das Superpositionsprinzip:

(3) Kommt an dem als starr (ganz oder in Teilen) vorausgesetzten Gebilde unter dem Einfluss eines gegebenen Kräftesystems ($\mathfrak{P}'$) das Kräftebild ($\mathfrak{P}'$),($\mathfrak{S}'$) zustande und unter dem Einfluss eines andern gegebenen Systems ($\mathfrak{P}''$) das Kräftebild ($\mathfrak{P}''$), ($\mathfrak{S}''$), so rufen die vereinigt angreifenden Systeme ($\mathfrak{P}'$) und ($\mathfrak{P}''$) das Kräftebild

$$(\mathfrak{P}),\ (\mathfrak{S}) \equiv (\mathfrak{P}' \dot{+} \mathfrak{P}''),\ (\mathfrak{S}' \dot{+} \mathfrak{S}'')$$

hervor.

Das Zeichen $\dot{+}$, das sich natürlich nur auf Grössen $\mathfrak{P}_i$ bezw. $\mathfrak{S}_i$ mit gleichem Index erstrecken darf, bedeutet hier mehr als eine graphische Summierung: $\mathfrak{P}'_i \dot{+} \mathfrak{P}''_i$ stellt in dieser Schreibweise in den nachfolgenden Zeilen stets die Resultierende aus $\mathfrak{P}'_i$ und $\mathfrak{P}''_i$ dar, entsprechend $\mathfrak{S}'_i \dot{+} \mathfrak{S}''_i$. Das ist dadurch selbstverständlich, dass $\mathfrak{P}'_i$ und $\mathfrak{P}''_i$ und ebenso $\mathfrak{S}'_i$ und $\mathfrak{S}''_i$ am nämlichen Knotenpunkt angreifen, sich also zur Resultierenden zusammensetzen, wenn ihre bezüglichen Komponenten, wie nach (2) bewiesen, zur resultierenden Komponente sich zusammensetzen. [Denn auch der Fall, dass die gesuchte Kraft nach Lage sowohl als nach Richtung und Grösse unbekannt ist, lässt sich stets auf den andern dadurch zurückführen, dass man an Stelle der Kraft ihre Komponenten sucht, denen bestimmte Angriffspunkte bezw. Angriffsgerade zugewiesen sind.]

In der obigen Vektorform wird der Satz selten zur Anwendung kommen: Die gesuchten Kräfte $\mathfrak{S}_i$, meistens als Stabspannungen auftretend, haben von vornherein vorgeschriebene Richtung, bieten also zunächst keine Veranlassung zur Einführung von Vektoren. Gleichwohl schien es wünschenswert, für einige Betrachtungen am Seilpolygon und an verwandten Aufgaben diese allgemeinste Form aufzustellen.

5. Das Gleichungssystem (1), dessen Konstante P_1, P_2, . . . P_m von einem gegebenen Kräftesystem ($\mathfrak{P}$) herrühren, kann man auf folgende Weise lösen. Nimmt man ein beliebiges Kräftesystem ($\mathfrak{P}'$), das die Beiträge

$$P'_1, P'_2, \ldots P'_m \text{ statt } P_1, P_2, \ldots P_m$$

zum Gleichungssystem liefert, und für eine der Unbekannten, etwa S_k, einen beliebigen Wert S'_k, so werden die ersten $m-1$ Gleichungen die übrigen Unbekannten

$$S'_1, S'_2, \ldots S'_{k-1}, S'_{k+1}, \ldots S_m$$

nach den P'_i und nach S'_k ausdrücken lassen. Man erhält das natürlich falsche Lösungssystem

$$(P', S'_k), (S').$$

Eine andere Annahme des Kräftesystems, ($\mathfrak{P}''$) mit den Beiträgen

$$P''_1, P''_2, \ldots . P''_m \text{ statt } P_1, P_2, \ldots P_m,$$

und der als gegebene Kraft angesehenen Unbekannten S'' liefert das ebenfalls falsche Lösungssystem

$$(P'', S''_k), (S'').$$

Ist nun zugleich

$$P_i = P'_i + P''_i ,$$
$$S_k = S'_k + S''_k ,$$

dann ist nach (2) auch

$$S_i = S'_i + S''_i .$$

Die letzte, die m^{te}, bisher nicht benützte Gleichung,

$$a_{m1} S_1 + a_{m2} S_2 + \ldots . + a_{mm} S_m + P_m = 0,$$

gibt dann nach Substitution von

$$S_i = S'_i + S''_i$$

einen Zusammenhang zwischen S'_k und S''_k, da ja die S_i alle nach S'_k und S''_k ausgedrückt sind.

Wählt man z. B. als erstes Ausgangssystem

(4) $$(P', S'_k) \equiv (P, S'_k = 0),$$

als zweites

(4) $$(P'', S''_k) \equiv (0, S''_k = X),$$

dann werden alle Unbekannten S''_i proportional X sein. In der Schlussgleichung,

$$a_{m1} S_1 + a_{m2} S_2 + \ldots . + a_{mm} S_m + P_m = 0,$$

ist als einzige Unbekannte X vorhanden, die daraus zu ermitteln ist.

Wie (2) zu (3) verallgemeinert wurde, so lässt sich auch hier eine Rechenvorschrift für die Lösung von m graphischen linearen Gleichungen,

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\,\mathfrak{S}_1 + a_{12}\,\mathfrak{S}_2 + \ldots\ldots + a_{1m}\,\mathfrak{S}_m + \mathfrak{P}_1 = 0,\\
&a_{21}\,\mathfrak{S}_1 + a_{22}\,\mathfrak{S}_2 + \ldots\ldots + a_{2m}\,\mathfrak{S}_m + \mathfrak{P}_2 = 0,\\
&\quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -\\
&a_{m1}\,\mathfrak{S}_1 + a_{m2}\,\mathfrak{S}_2 + \ldots\ldots + a_{mm}\,\mathfrak{S}_m + \mathfrak{P}_m = 0,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

geben. Man setze für eine der Unbekannten, etwa $\mathfrak{S}_k$, einen beliebigen Wert $\mathfrak{S}'_k$ und statt der $\mathfrak{P}_i$ beliebige Werte $\mathfrak{P}'_i$, dann werden sich durch die m—1 ersten Gleichungen die übrigen Unbekannten

$$\mathfrak{S}_1,\ \mathfrak{S}_2,\ \ldots\ \mathfrak{S}_{k-1},\ \mathfrak{S}_{k+1},\ \ldots\ \mathfrak{S}_m$$

nach den $\mathfrak{P}'_i$ und $\mathfrak{S}'_k$ linear ausdrücken lassen. Wie diese Annahme das falsche Kräftebild $(\mathfrak{P}',\ \mathfrak{S}'_k)$, $(\mathfrak{S}')$ liefert, ebenso ergibt eine andere Annahme $\mathfrak{P}''_i$ statt $\mathfrak{P}_i$ und $\mathfrak{S}''_k$ statt $\mathfrak{S}_k$ das ebenfalls falsche Kräftebild $(\mathfrak{P}'',\ \mathfrak{S}''_k)$, $(\mathfrak{S}'')$.

Unter der Voraussetzung nun,

$$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}'_i \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{P}''_i.$$
$$\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}'_k \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{S}''_k,$$

wird nach (3) auch

$$\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}'_i \mathbin{\hat{+}} \mathfrak{S}''_i.$$

Die letzte Gleichung,

$$a_{m1}\,\mathfrak{S}_1 + a_{m2}\,\mathfrak{S}_2 + \ldots\ldots + a_{mm}\,\mathfrak{S}_m + \mathfrak{P}_m = 0,$$

gibt dann einen Zusammenhang zwischen den $\mathfrak{S}'_k$ und $\mathfrak{S}''_k$.

Natürlich lässt sich diese Lösungsmethode insofern verallgemeinern, als man zwei, drei usw. der Unbekannten beliebig wählt und zum Schluss dann zwei bezw. drei usw. Gleichungen für diese speziellen Unbekannten allein übrig hat. In § 8 wird (bei der Zerlegung einer Kraft nach sechs Richtungen im Raum) davon Gebrauch gemacht.

§ 3.

Vorschlag für die Berechnung unbekannter Kräfte beim Fachwerk.

1. Die eben besprochene Lösung analytischer oder graphischer linearer Gleichungen bildet die Basis dieses Vorschlags. Sei $\mathfrak{S}_k$ eine der gesuchten Grössen, als Wirkung linear abhängig von der Ursache vorausgesetzt, wie es praktisch bei gesuchten Kräften am Fachwerk zutrifft; der

Allgemeinheit halber sei sie als Vektor gedacht, d. h. man kennt weder Grösse noch Richtung von ihr, nur ihren Angriffspunkt. Angenommen, $\mathfrak{S}_k$ sei gefunden, und von ihr aus alle weiteren noch unbekannten Kräfte

$$\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots \mathfrak{S}_{k-1}, \mathfrak{S}_{k+1}, \ldots \mathfrak{S}_m$$

abgeleitet. Dieselben werden natürlich gleichfalls linear abhängig von $\mathfrak{S}_k$ sein. Dann wird es immer am Schluss eine einfache Kontrolle geben, die letzte Gleichung des Systems (1) oder (5) — bei Fachwerken z. B. an den letzten Knotenpunkten, bei räumlichen Aufgaben durch die Affinitätsbeziehungen zwischen Grund- und Aufriss, bei Knotenpunktsverschiebungen durch die Auflagerbedingungen usw. — meist in Form einer analytischen Gleichung,

$$T_1 + T_2 + \ldots\ldots + T_m = 0, \tag{6}$$

oder einer graphischen,

$$\mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{T}_m = 0, \tag{6}$$

welche die Richtigkeit der gefundenen Lösung bestätigen soll.

Sei etwa $\mathfrak{S}_k$ eine gesuchte Stabspannung, dann kommt es auf dasselbe hinaus, wenn man sagt: Ich denke mir den Stab, der $\mathfrak{S}_k$ trägt, beseitigt und $\mathfrak{S}_k$ als äussere Kraft, die je an den Endpunkten dieses Stabes wirkt. Man hat dann das System ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}_k$) gegebener Kräfte, aus dem das Spannungsbild ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}_k$), ($\mathfrak{S}$) hervorgeht.

2. Angenommen, man habe nicht dieses wirkliche System gegebener äusserer Kräfte ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}_k$), sondern ein beliebiges anderes ($\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{S}'_k$) als Ausgangssystem gewählt und von ihm ausgehend das natürlich falsche Spannungsbild ($\mathfrak{P}'$, $\mathfrak{S}'_k$), ($\mathfrak{S}'$) geschaffen, dann wird die Kontrolle am Schluss geben

$$\mathfrak{T}'_1 + \mathfrak{T}'_2 + \ldots\ldots + \mathfrak{T}'_m \lesseqgtr 0,$$

oder in anderer Form

$$\mathfrak{T}'_1 + \mathfrak{T}'_2 + \ldots\ldots\ldots + \mathfrak{T}'_m = \mathfrak{W}'.$$

Es wird sich ein „Widerspruch“ $\mathfrak{W}'$ ergeben. Und für ein anderes Spannungsbild ($\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{S}''_k$), ($\mathfrak{S}''$), erzeugt durch das Ausgangssystem ($\mathfrak{P}''$, $\mathfrak{S}''_k$), ein anderer „Widerspruch“

$$\mathfrak{T}''_1 + \mathfrak{T}''_2 + \ldots + \mathfrak{T}''_m = \mathfrak{W}''.$$

Sind die beiden falschen Ausgangssysteme $(\mathfrak{P}', \mathfrak{S}'_k)$ und $(\mathfrak{P}'', \mathfrak{S}''_k)$ „Komponenten“ des wirklichen Systems $(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}_k)$, d. h. ist

$$\mathfrak{P}_i = \mathfrak{P}'_i \mathbin{\dot{+}} \mathfrak{P}''_i ,$$
$$\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}'_k \mathbin{\dot{+}} \mathfrak{S}''_k ,$$

dann ist nach (3) auch $\mathfrak{S}_i$ die Resultierende von $\mathfrak{S}'_i$ und $\mathfrak{S}''_i$, also

$$(\mathfrak{T}'_1 + \mathfrak{T}''_1) + (\mathfrak{T}'_2 + \mathfrak{T}''_2) + \ldots + (\mathfrak{T}'_m + \mathfrak{T}''_m) = 0$$

bezw. $\mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'' = 0$.

Für die spezielle Wahl wie in (4),

$$(\mathfrak{P}', \mathfrak{S}'_k) \equiv (\mathfrak{P}', 0),$$
$$(\mathfrak{P}'', \mathfrak{S}''_k) \equiv (0, \mathfrak{X}),$$

ist $\mathfrak{W}''$ proportional $\mathfrak{X}$. Dann ergibt die Kontrollgleichung

$$\mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'' = 0,$$

da $\mathfrak{W}'$ eine bestimmte bekannte Grösse ist, die Unbekannte $\mathfrak{X}$. Natürlich muss, wenn die Rechnung richtig durchgeführt wurde, $\mathfrak{W}'$ parallel $\mathfrak{W}''$ sein.

3. Entsprechend wird bei willkürlicher Annahme einer weitern Unbekannten $\mathfrak{S}_l$ als äusserer Kraft die durch die Ausgangssysteme

$$(\mathfrak{P}', \mathfrak{S}'_k, \mathfrak{S}'_l) \equiv (\mathfrak{P}, 0,0),$$
$$(\mathfrak{P}'', \mathfrak{S}''_k, \mathfrak{S}''_l) \equiv (0, \mathfrak{X}, 0),$$
$$(\mathfrak{P}''', \mathfrak{S}'''_k, \mathfrak{S}'''_l) \equiv (0, 0, \mathfrak{Y})$$

erzeugte Kontrollgleichung

$$(\mathfrak{T}'_1 + \mathfrak{T}''_1 + \mathfrak{T}'''_1) + (\mathfrak{T}'_2 + \mathfrak{T}''_2 + \mathfrak{T}'''_2) + \ldots$$
$$+ (\mathfrak{T}'_m + \mathfrak{T}''_m + \mathfrak{T}'''_m) = 0$$

bezw. $\mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'' + \mathfrak{W}''' = 0$.

$\mathfrak{W}''$ und $\mathfrak{W}'''$ sind proportional den Unbekannten $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{W}'$ ist eine durch die Kräfte $\mathfrak{P}_i$ bestimmte bekannte Grösse, so dass aus der graphischen Kontrollgleichung $\mathfrak{W}''$ und $\mathfrak{W}'''$ und damit $\mathfrak{X} = \mathfrak{S}_k$ bezw. $\mathfrak{Y} = \mathfrak{S}_l$ ermittelt werden kann.

4. Die vorausgehenden Gleichungen behandeln den in der Praxis am meisten vorkommenden Fall, dass die Richtung von $\mathfrak{S}_k$ bezw. $\mathfrak{S}_l$ . . . bereits bekannt ist und nur die Grösse gesucht wird. Aber auch, wenn Richtung und Grösse von $\mathfrak{S}_k$ sowie von den andern $\mathfrak{S}_i$ unbekannt sind, wie z B. beim

Aufsuchen von Gelenkdrücken, wird genau die gleiche Entwicklung am Schluss eine Kontrollgleichung geben, die $\mathfrak{S}_k$ nach Grösse und Richtung bestimmt. In den nachfolgenden Zeilen werden verschiedene solcher Aufgaben behandelt. Die auftretende Kontrollgleichung bestimmt zunächst die Richtung irgend einer der gesuchten Kräfte $\mathfrak{S}_n$ und damit die aller andern $\mathfrak{S}_i$; ist die Richtung gefunden, so folgt daraus der Zahlenwert der Unbekannten.

5. Die vorangehende Methode, deren spezieller Gedankengang nicht wesentlich neu ist — Henneberg hat sie erstmals analytisch angewandt durch die „Stabvertauschung", Föppl graphisch durch die Knotenpunktsbedingungen; man vergleiche deswegen Schlink: „Statik der Raumfachwerke" S. 103, Teubner 1907 — sucht einerseits eine Vereinheitlichung aller Lösungen statischer Aufgaben zu erzielen: eine einzige Rechenvorschrift gilt für sie alle, nämlich willkürliche Annahme einer oder mehrerer der gesuchten Kräfte und Aufstellung einfacher Kontrollgleichungen für dieselben. Anderseits will sie freimachen von geometrischen Sätzen und dafür äquivalente unmittelbar einzusehende Sätze der Statik verwenden.

Die vorgeschlagene Methode — ich nenne sie einstweilen, um ihren Inhalt zu treffen, „Korrekturprinzip" — lässt sich folgendermassen in eine Formel kleiden:

(7) Um linear abhängige statisch bestimmte unbekannte Kräfte aufzufinden, mache man über eine oder mehrere derselben eine mit den Systembedingungen verträgliche willkürliche Annahme. Die anderen gesuchten Kräfte ergeben sich dann durch Superposition der von den gegebenen Kräften allein abhängigen und der von der willkürlich angenommenen Kraft allein abhängigen Komponenten. Eine einfache Kontrollgleichung ergibt dann analytisch oder graphisch die willkürlich angenommenen Kräfte.

§ 4.

Anwendung auf das Seilpolygon und verwandte Aufgaben.

1. Wählt man zu einem gegebenen Kräftesystem $(\mathfrak{P})$, um das Seilpolygon zu finden, den Pol $0'$ beliebig (Abb. 1 und 2), oder was auf das Gleiche hinauskommt, irgend einen Polstrahl $\mathfrak{S}'_k$, so sind die andern

$$\mathfrak{S}'_0, \mathfrak{S}'_1, \ldots \mathfrak{S}'_{k-1}, \mathfrak{S}'_{k+1}, \ldots \mathfrak{S}'_n$$

von diesem linear abhängig. Das Kräftesystem $(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}'_k)$ bestimmt dann das Kräftebild $(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}'_k)$, $(\mathfrak{S}')$.

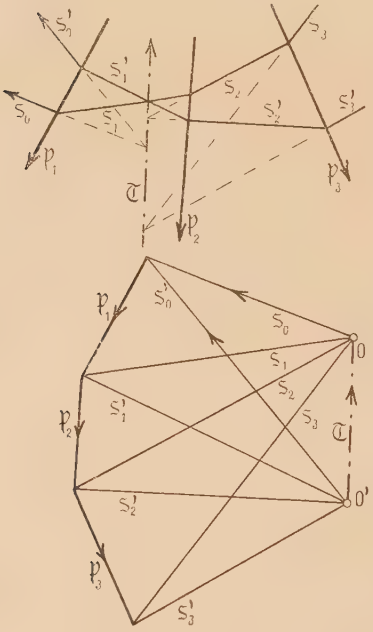

Abb. 1 und 2.

Ist nun $\mathfrak{S}'_k$ die Resultierende aus $\mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{T}$, also das System $(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}'_k)$ in die Systemkomponenten $(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}_k)$ und $(0, \mathfrak{T})$ zerlegt, von denen die erste das Kräftebild $(\mathfrak{P}, \mathfrak{S}_k)$, $(\mathfrak{S})$, die zweite das Kräftebild $(0, \mathfrak{T})$, $(\mathfrak{T})$ liefert, wo alle $\mathfrak{T}_i$ gleich sind $\mathfrak{T}$, so muss auch $\mathfrak{S}'_i$ die Resultierende aus $\mathfrak{S}_i$ und $\mathfrak{T}$ sein. Damit ist dann der bekannte Satz bewiesen: Zwischen zwei verschiedenen Seilpolygonen für das nämliche Kräftesystem besteht die Beziehung, dass entsprechende Seilpolygonseiten sich auf der nämlichen Geraden schneiden. Diese Gerade ist parallel zur Verbindungsgeraden der Pole 0 und $0'$ der beiden Polfiguren, d. i. parallel $\mathfrak{T}$.

2. Ganz allgemein gestatten lineare geometrische Aufgaben ohne Kenntnis allgemein-projektiver oder speziell-geometrischer Sätze fast durchweg nach (3) bezw. (7) eine einfache Lösung, wenn man die einzelnen auftretenden Geraden

als Kräfte betrachtet. Es sei zunächst erinnert an die in der Mechanik oft behandelte Aufgabe, ein n-Eck zu konstruieren, dessen Ecken auf n gegebenen Geraden $g_1, g_2, \ldots g_n$ liegen, und dessen Seiten durch n gegebene Punkte $P_1, P_2, \ldots . P_n$ gehen. Die Aufgabe wäre gelöst, wenn man eine Seite hätte Sei diese $\mathfrak{S}_1$, so wird sich daraus fortlaufend $\mathfrak{S}_2, \mathfrak{S}_3, \ldots \mathfrak{S}_n$ ergeben. Diese alle sind linear abhängig von $\mathfrak{S}_1$, folglich gibt die Auffassung von $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots \mathfrak{S}_n$ als Kräften — „Gedenkdrücke“ durch die vorgeschriebenen Punkte, die „Gelenke“ $P_1, P_2, \ldots P_n$ — nach dem Prinzip (7) sofort eine Lösung. Man nimmt die Seite $\mathfrak{S}'_1$ ganz willkürlich innerhalb der vorgeschriebenen Bedingungen an und erhält fortlaufend durch Erfüllung der übrigen Bedingungen die andern Seiten $\mathfrak{S}'_2, \mathfrak{S}'_3, \ldots . \mathfrak{S}'_n$; in der neuen Ausdrucksweise: die Seite $\mathfrak{S}'_1$ bestimmt das Kräftebild $(\mathfrak{S}'_1), (\mathfrak{S}')$. Eine andere Annahme $\mathfrak{S}''_1$ bestimmt das Kräftebild $(\mathfrak{S}''_1), (\mathfrak{S}'')$. Die Superposition von $\mathfrak{S}'_1$ und $\mathfrak{S}''_1$ bestimmt das Kräftebild

$$(\mathfrak{S}'_1 \dot{+} \mathfrak{S}''_1), (\mathfrak{S}' \dot{+} \mathfrak{S}'') \equiv (\mathfrak{S}_1), (\mathfrak{S}),$$

d. h. $\mathfrak{S}_i$ ist die Resultierende aus $\mathfrak{S}'_i$ und $\mathfrak{S}''_i$, wenn $\mathfrak{S}_1$ die Resultierende von $\mathfrak{S}'_1$ und $\mathfrak{S}''_1$ ist.

Damit erhält man gleichzeitig die Kontrollgleichung

$$\mathfrak{S}_n \equiv \mathfrak{S}'_n \dot{+} \mathfrak{S}''_n,$$

d. h. die letzte Seite $\mathfrak{S}_n$ muss einerseits als Resultierende von $\mathfrak{S}'_n$ und $\mathfrak{S}''_n$ durch deren Schnittpunkt gehen, andrerseits nach Vorschrift durch den gegebenen Punkt P_n.

Abb. 3 löst die Aufgabe für den Fall eines Vierecks. Die Richtung von $\mathfrak{S}'_1$ bezw. $\mathfrak{S}''_1$ ist beliebig gewählt. Durch $\mathfrak{S}'_1$ ist $\mathfrak{S}'_4$ bestimmt, entsprechend $\mathfrak{S}''_4$ durch $\mathfrak{S}''_1$. Beide schneiden sich in (IV). $\mathfrak{S}_4$ muss nun einerseits als

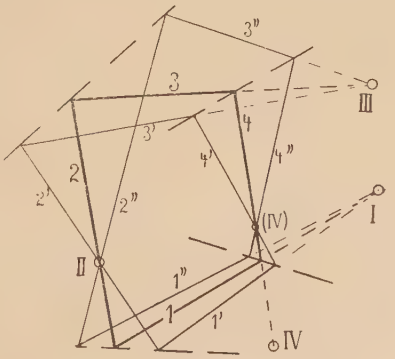

Abb. 3.

Resultierende von $\mathfrak{S}'_4$ und $\mathfrak{S}''_4$ durch diesen Punkt gehen, andrerseits nach Vorschrift durch IV.

Abb. 4 stellt die Lösung der gleichen Aufgabe an einem Dreiecke dar. Die willkürlich gewählten $\mathfrak{S}'_1$ und $\mathfrak{S}''_1$ bestimmen $\mathfrak{S}'_3$ bezw. $\mathfrak{S}''_3$, durch deren Schnittpunkt (III) dann $\mathfrak{S}_3$ gehen muss. Am einfachsten wird die Konstruktion, wenn man $\mathfrak{S}'_1$ durch I und II legt, die Seite $\mathfrak{S}''_1$ aber parallel der Geraden, auf der sie sich mit $\mathfrak{S}''_2$ schneiden soll. In der Abbildung ist diese Konstruktion strichpunktiert eingezeichnet.

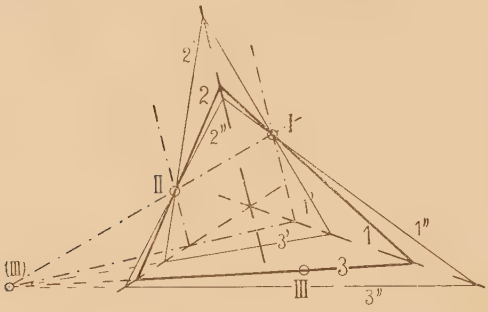

Abb. 4.

3. Die Aufgabe, eine Gerade durch einen vorgeschriebenen Punkt A so zu legen, dass sie auch noch durch den schwer zu erreichenden Schnittpunkt von zwei gegebenen Geraden geht, gestattet wie so viele projektiv-geometrische Aufgaben eine einfache Lösung mit dem Seilpolygon, wenn man die gegebenen Geraden wie auch die gesuchte als Kräfte ansieht, die gesuchte $\mathfrak{P}$ speziell als Resultierende der beiden gegebenen $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$. Die Endstrahlen des Seilpolygons zu diesen beiden Kräften müssen sich dann auf der gesuchten Geraden schneiden, Abb. 5. Legt man also ein erstes Seilpolygon so, dass die Endstrahlen durch den gegebenen Punkt A gehen, und ein zweites derart, dass die Schnittpunkte entsprechender Seilstrahlen auf den gegebenen Geraden $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ liegen — man ist dann vollständig

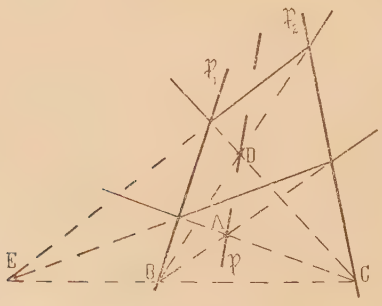

Abb. 5.

unabhängig von der Grösse der gedachten Kräfte $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ — so bestimmen dessen Endstrahlen einen weitern Punkt D der gesuchten Geraden.

§ 5.

Das nichteinfache ebene Fachwerk.

1. Das statisch bestimmte ebene Fachwerk ist zu unterscheiden als einfaches, wenn bei beliebiger Belastung alle seine Spannungen mit Hilfe eines Cremonaplanes vom ersten bis zum letzten Stab ermittelt werden können, und als nichteinfaches, wenn diese Bedingung nicht zutrifft. Für die Bestimmung der Stabspannungen im nichteinfachen Fachwerk existieren mehrere Lösungsmethoden: In spezielleren Fällen die Culmannsche und Rittersche Methode, die Föpplsche Methode der imaginären Gelenke, die Methode des unbestimmten Maßstabes, in den allgemeinen Fällen die Hennebergsche Methode der Stabvertauschung, die kinematische Methode von Müller-Breslau, die Föpplsche Methode der Knotenpunktsbedingungen. Natürlich können diese auch auf Spezialfälle angewandt werden.

Für den allgemein möglichen Fall führt das Korrekturprinzip rasch zum Ziel. Sei das an dem nichteinfachen Fachwerk oder an dem nichteinfachen Teil desselben angreifende System gegebener äusserer Kräfte wieder mit $(\mathfrak{P})$ bezeichnet. In dieses System sind natürlich auch eventuell bereits bekannte Spannungen inbegriffen, wenn sie an dem untersuchten Gebilde angreifen. Es sei vorausgesetzt, dass mit dem Bekanntsein einer der gesuchten Spannungen das Fachwerk zu einem einfachen wird — der in der Praxis seltener auftretende Fall, dass erst das Bekanntsein zweier dieser Spannungen das Fachwerk zu einem einfachen machen würde, soll in der nächsten Nummer behandelt werden — und dieselbe mit $\mathfrak{S}_k$ bezeichnet. Wäre $\mathfrak{S}_k$ bekannt, so könnte man sofort einen Cremonaplan zeichnen, und damit die übrigen

Spannungen $\mathfrak{S}_i$ auffinden. Letztere sind linear abhängig vom System ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}_k$) und lassen sich durch Superposition

$$\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}'_i + \mathfrak{S}''_i$$

auffinden, wenn $\mathfrak{S}'_i$ die Spannung nur unter dem Einfluss des Kräftesystems ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}'_k = 0$) und $\mathfrak{S}''_i$ diejenige unter dem alleinigen Einfluss von (0, $\mathfrak{S}''_k = \mathfrak{X}$) ist. Die Superposition der beiden Spannungsbilder ($\mathfrak{P}$, 0), ($\mathfrak{S}'$) und (0, $\mathfrak{X}$), ($\mathfrak{S}''$) gibt das Spannungsbild ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{X}$), ($\mathfrak{S}$).

An einem beliebigen Knotenpunkt — oder an einem beliebigen Stab, ganz allgemein an einem beliebigen Teil des Fachwerkes — werden alle an ihm angreifenden Spannungen mit der dort angreifenden äusseren Kraft $\mathfrak{P}$ bezw. der Resultierenden von solchen im Gleichgewicht sein,

$$\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{S} = 0$$

$$\text{bezw. } (\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{S}') + \Sigma\mathfrak{S}'' = 0$$

$$\text{oder } \mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'' = 0,$$

wobei die graphische Summe $\mathfrak{W}' = \Sigma\mathfrak{S}' + \mathfrak{P}$ eine bestimmte Grösse, die graphische Summe $\mathfrak{W}'' = \Sigma\mathfrak{S}''$, wie alle $\mathfrak{S}''_i$, proportional zu $\mathfrak{X}$ ist. $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{W}''$ sind die bereits erwähnten „Widersprüche“ der Kontrollpolygone. Da $\mathfrak{W}'$ eine bestimmte Grösse ist, lässt sich $\mathfrak{W}'' = -\mathfrak{W}'$ und damit $\mathfrak{X}$, das ja proportional $\mathfrak{W}''$ ist, ermitteln. Natürlich ist $\mathfrak{W}'$ und entsprechend $\mathfrak{W}''$ erst dann von Null verschieden, wenn man die Kontrollgleichung $\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{S} = 0$ an einem wirklichen Kontrollpunkt bezw. Kontrollteil anwendet, für den also alle angreifenden Spannungen bereits ermittelt sind. Ausgenommen, wenn zufällig die Spannung $\mathfrak{S}_k = \mathfrak{X}$ selber Null wird.

Für einen Knotenpunkt als Kontrollteil des Fachwerkes spezialisiert sich das Korrekturprinzip zur Föpplschen Methode der Knotenpunktsbedingungen, für einen gedachten Ersatzstab zur Hennebergschen Methode der Stabvertauschung. Gelegentlich sei erwähnt, dass beide Methoden direkt identisch sind, insofern nämlich die oben gefundenen Vektoren $\mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{W}''$ die Spannungen $\mathfrak{S}'_e$ und $\mathfrak{S}''_e$ des Ersatzstabes vorstellen, der vom vorletzten Kontrollpunkt zum letzten geht.

Die Konstruktion des Spannungsbildes des Stabverbandes der Abb. 6 — sie ist der Abb. S. 233 des Handbuches der Ingenieurwissenschaften II_{II}, dritte Auflage, ähnlich gewählt — erfolgt durch Superposition des Spannungsbildes $(\mathfrak{P})$, $(\mathfrak{S}')$ der Abb. 7 und des Spannungsbildes $(\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{X})$, $(\mathfrak{S}'')$ der Abb. 8. Die Kontrollgleichung erfolgt am Punkt V, nachdem man der Reihe nach bei II,

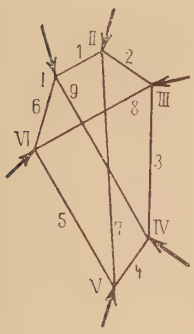

Abb. 6

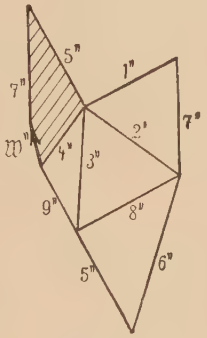

Abb. 7.

III, IV, VI die unbekannten Spannungskomponenten ermittelt hat. Die Kontrollpolygone beider Spannungsbilder sind schraffiert. Damit $\mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'' = 0$, muss man $\mathfrak{W}''$ und damit auch $\mathfrak{X}$ dreiviertelmal so gross wählen als angenommen wurde. In Abb. 8 sind dann noch die wahren Spannungen $\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}'_i + \mathfrak{S}''_i$ eingezeichnet.

2. Ist das Fachwerk derart, dass es erst mit dem Bekanntsein von zwei Spannungen einfach wird, so sind diese — $\mathfrak{S}_k$ und $\mathfrak{S}_l$ — wieder als gegebene äussere Kräfte zu betrachten. Man erhält dann alle übrigen Spannungen in der Form

$$\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}'_i + \mathfrak{S}''_i + \mathfrak{S}'''_i.$$

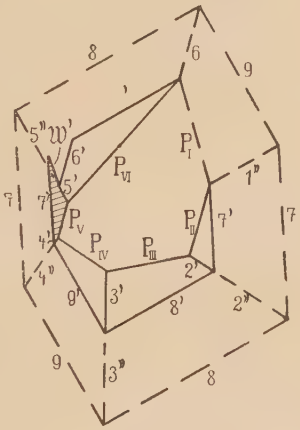

Abb. 8.

Dabei sind die $\mathfrak{S}'_i$ gefunden wie unter 1, $\mathfrak{S}''_i$ und $\mathfrak{S}'''_i$ je unter dem alleinigen Einfluss der beiden als bekannt angesehenen Spannungen

$$\mathfrak{S}_k = \mathfrak{X},$$
$$\mathfrak{S}_l = \mathfrak{Y}.$$

Am Kontrollpunkt erhält man für jedes einzelne Spannungsbild wieder die nichtgeschlossenen Kräftepolygone

$$\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{S}' = \mathfrak{W}',$$
$$\Sigma\mathfrak{S}'' = \mathfrak{W}'',$$
$$\Sigma\mathfrak{S}''' = \mathfrak{W}'''.$$

Da aber unter dem Einfluss des tatsächlich angreifenden Kräftesystems ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{S}_l$) Gleichgewicht sein muss, so gilt

$$\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{S} = 0$$
$$\text{bezw. } (\mathfrak{P} + \Sigma\mathfrak{S}') + \Sigma\mathfrak{S}'' + \Sigma\mathfrak{S}''' = 0$$
$$\text{oder } \mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'' + \mathfrak{W}''' = 0.$$

Von den drei Grössen $\mathfrak{W}'$, $\mathfrak{W}''$, $\mathfrak{W}'''$ ist $\mathfrak{W}'$ eine durch die $\mathfrak{P}_i$ bestimmte Grösse; dadurch lassen sich graphisch $\mathfrak{W}''$ und $\mathfrak{W}'''$ ermitteln und hieraus wieder $\mathfrak{x} = \mathfrak{S}_k$, $\mathfrak{y} = \mathfrak{S}_l$, die ja $\mathfrak{W}''$ bezw. $\mathfrak{W}'''$ proportional sind.

Uebrigens lassen sich diese beiden Spannungen in vielen Fällen dadurch einfacher berechnen, dass man sie als Komponenten eines „Gelenkdruckes“ betrachtet und so wie folgt ermittelt.

3. Zur Aufgabe, einen solchen nach Grösse und Richtung unbekannten Gelenkdruck aufzufinden, überlege man:

Dieser Gelenkdruck, er sei mit $\mathfrak{S}_k$ bezeichnet, wird, sobald er bekannt ist, andere Grössen $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, ... $\mathfrak{S}_n$, alle linear von $\mathfrak{S}_k$ abhängig, bestimmen. Nimmt man nun $\mathfrak{S}_k$ willkürlich einmal gleich $\mathfrak{S}'_k$ an, und bezeichnet das dadurch entstandene Kräftebild wieder mit ($\mathfrak{S}'_k$), ($\mathfrak{S}'$), ein andermal gleich $\mathfrak{S}''_k$, das davon abhängige Kräftebild sei ($\mathfrak{S}''_k$), ($\mathfrak{S}''$), so werden die von $\mathfrak{S}_k$ abhängigen Grössen

$$\mathfrak{S}_i = \mathfrak{S}'_i \dot{+} \mathfrak{S}''_i,$$

wenn

$$\mathfrak{S}_k = \mathfrak{S}'_k \dot{+} \mathfrak{S}''_k.$$

Die Kontrolle ist wie nach § 4:

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}'_n \dot{+} \mathfrak{S}''_n$$

muss nach Vorschrift durch einen gegebenen Punkt gehen, bestimmt dadurch sich und daraus rückwärts $\mathfrak{S}_k$ sowie alle $\mathfrak{S}_i$.

Als Beispiel stellt Abb. 9 die Aufsuchung der Gelenkdrücke eines Dreigelenkbogens dar. $\mathfrak{P}_r$ und $\mathfrak{P}_l$ sind die Resultierenden der an der rechten bezw. linken Scheibe angreifenden Kräfte, $\mathfrak{P}$ ist die Resultierende dieser beiden. $\mathfrak{S}'_1$ und $\mathfrak{S}''_1$ sind durch I beliebig angenommen, die Kontrolle ist

$$\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}'_3 \dot{+} \mathfrak{S}''_3.$$

Etwas vereinfachen wird sich wie in § 4,2 die Aufgabe durch Anwendung der in der Abbildung strichpunktiert wiedergegebenen Konstruktion.

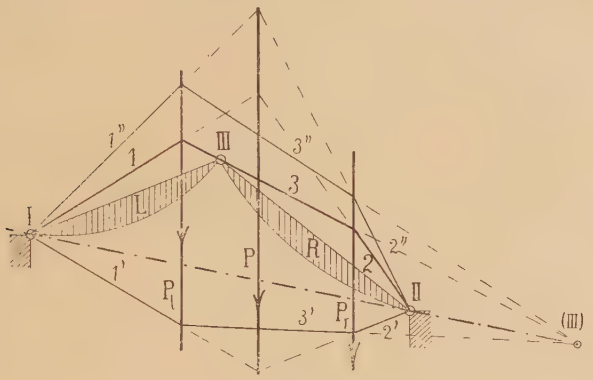

Abb. 9.

§ 6.

Das statisch unbestimmte Fachwerk.

Die statische Unbestimmtheit denke man sich zunächst in der Art der Auflagerung gegeben, beispielshalber durch einen Zweigelenkbogen. Als statisch unbestimmte Grösse tritt dann der Horizontalschub H auf. Wäre H bekannt, so könnte man alle unbekannten Spannungen durch einen Cremonaplan oder im Fall eines nichteinfachen Trägers durch eine der in Betracht kommenden Methoden auffinden.

Das Korrekturprinzip bestimmt nun, wenn H unbekannt ist, die tatsächlich auftretenden Spannungen durch Superposition aus den Beiträgen der gegebenen äusseren Kräfte ohne H und aus den durch H allein verursachten. Die Unbekannte H findet sich aus der Kontrollgleichung, dass die Verschiebung des Punktes, an dem H angreift, Null sein muss. Nach dem Satz von Maxwell-Mohr ist die Verschiebung unter dem Einfluss der äusseren Kräfte in Richtung von H

$$\eta_1 = \frac{1}{H} \Sigma r S T = \Sigma u r S,$$

da $T_i = u_i H$,

und die Verschiebung in der gleichen Richtung unter dem Einfluss von H allein

$$\eta_2 = -\Sigma u^2 r H,$$

woraus mit

$$\eta_1 + \eta_2 = 0$$

$$H = -\frac{\Sigma u r S}{\Sigma u^2 r}.$$

Ist aber die statische Unbestimmtheit nicht in der Art der Auflagerung, sondern in der Zusammensetzung des Fachwerkes begründet, so kann man die Endpunkte des überzähligen Stabes als die Auflagergelenke auffassen — die vorhandenen wirklichen Auflagerkräfte natürlich als äussere Kräfte — und die gesuchte Stabspannung X des erwähnten Stabes als Horizontalschub, der dann wieder

$$X = -\frac{\Sigma u r S}{\Sigma u^2 r}.$$

§ 7.

Der Verschiebungsplan.

Voraussetzung: Man kennt die Längenänderung eines jeden Stabes l_i der vorliegenden Fachwerkskonstruktion. Die Frage, ob der Träger statisch bestimmt ist oder nicht, spielt erst dann eine Rolle, wenn man — natürlich innerhalb gegebener Grenzen — diese Längenänderungen, so wie es bei dem in Abb. 10 skizzierten Fachwerk geschehen ist, willkürlich annimmt. Die Zahl der willkürlich angenommenen Längenänderungen darf nur $2n - q$ sein, wenn n die Zahl der Knotenpunkte und q die der „überzähligen“ Stäbe ist; die Auflagerung denke man sich durch Stäbe bestimmt. Durch diese $2n - q$ Längenänderungen sind dann alle übrigen bestimmt.

Will man zunächst nur einen „Relativverschiebungsplan“, der also nur die relative Verschiebung der einzelnen

Knotenpunkte zum Fachwerk selbst angibt — die Verschiebung gegenüber den festen Auflagern, die absolute Verschiebung in der festen Ebene des Fachwerks, ist damit noch nicht bestimmt — so kann man über die drei „Koordinaten“ eines beliebig ausgewählten Fachwerkstabes willkürlich verfügen, d. h. man darf demselben eine willkürliche Lage in der Ebene vorschreiben; dadurch ist dann die Lage der übrigen Knotenpunkte nach der Methode des Verschiebungsplanes bestimmt.

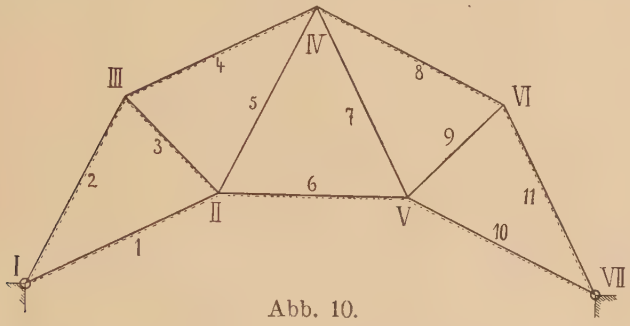

Abb. 10.

Um von dem Relativverschiebungsplan zum absoluten überzugehen, hat man dem Träger nur mehr eine Bewegung so zu erteilen, dass er die durch die Auflagerung bedingte Endlage auch wirklich einnimmt. Dieser Uebergang in die Endlage lässt sich stets durch Drehung des Trägers um einen leicht zu ermittelnden Punkt bewerkstelligen. Meist wird es wie in Abb. 10 einer der festen Auflagerpunkte sein.

Vom Standpunkt des Korrekturprinzipes aus: Man macht über eine der gesuchten $2n - p$ Verschiebungskomponenten — p sind ja durch die Art der Auflagerung schon gegeben — eine mit den Systembedingungen verträgliche günstige Annahme v_k. Durch dieses v_k sind dann alle übrigen Verschiebungen v_i bestimmt und damit der Relativverschiebungsplan (v_k),(v) der Knotenpunkte I, II, ...

Eine andere Annahme v'_k bestimmt den Relativverschiebungsplan (v'_k),(v') dieser Knotenpunkte, d. i. den Plan I′, II′ . . . . .

Ist nun die gesuchte absolute Verschiebung

$$v''_k = v_k + v'_k ,$$

d. h. sind v_k und v'_k die Komponenten der gesuchten absoluten Verschiebung v''_k, dann gilt auch

$$v''_i = v_i + v'_i$$

und umgekehrt.

Eine durch die gegebenen Auflagerbedingungen stets zu erhaltende Kontrollgleichung gibt dann Aufschluss über eine oder mehrere der Verschiebungskomponenten, bestimmt daraus v_k und v'_k bezw. v''_k und damit dann alle v''_i als die Wege I'I, II'II, ...

An dem durch Abb. 10 dargestellten einfach statisch unbestimmten Fachwerk ist z. B. angenommen, dass der Knotenpunkt II in Richtung des Stabes 1 um Δl_1 sich verschiebt. Durch dieses v_{II} ist dann der Relativverschiebungsplan I, II, . . . VII der Abb. 11 bestimmt. Eine andere Annahme v'_{II} senkrecht zu v_{II} bestimmt den Relativverschiebungsplan I', II, ... VII' derselben Abbildung. Natürlich muss dieser, seiner geometrisch-mechanischen Deutung entsprechend, eine zum gegebenen Fachwerk ähnliche Figur ergeben. Speziell kann man wie im vorliegenden Fall v'_{II} so wählen, dass VII und VII' zusammenfallen, d. h. man zeichnet einfach über I VII als Basis das Fachwerk I' . . . . VII' ähnlich der Abb. 10. Dann ist

$$v''_{VII} = 0 = v_{VII} + v'_{VII}$$

die ware Verschiebung des Knotenpunktes VII; und damit I' I, II' II . . ., d. h. $v''_i = v_i + v'_i$ die wahre Verschiebung der übrigen Knotenpunkte.

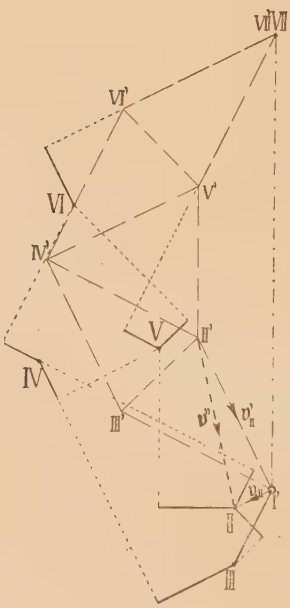

Abb. 11.

Sinngemäss lässt sich die Methode natürlich auch, mit noch grösserem Vorteil jedenfalls als beim ebenen Fachwerk, auf räumliche Konstruktionen anwenden.

§ 8.

Anwendung auf räumliche Aufgaben.

1. Zerlegung der Kraft $\mathfrak{P}$ nach den drei Komponenten $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, wenn alle vier Kräfte am nämlichen Punkt angreifen: Man nimmt $\mathfrak{S}_1$ willkürlich an und zerlegt in einem beliebigen Riss, etwa im Aufriss,

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{S}'_2 + \mathfrak{S}'_3,$$
$$\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}''_2 + \mathfrak{S}''_3.$$

In jedem Riss muss dann gelten

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \mathfrak{S}_3 = 0$$
$$\text{bezw. } (\mathfrak{P} + \mathfrak{S}'_2 + \mathfrak{S}'_3) + (\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}''_2 + \mathfrak{S}''_3) = 0$$
$$\text{oder } \mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'' = 0.$$

Im Aufriss ist natürlich $\mathfrak{W}'$ wie $\mathfrak{W}''$ identisch Null, nicht aber im Grundriss, es sei denn, dass $\mathfrak{S}_3$ Null ist. In diesem ist $\mathfrak{W}'$ eine durch $\mathfrak{P}$ bestimmte Grösse, wodurch sich wieder $\mathfrak{W}''$ und das zu $\mathfrak{W}''$ proportionale $\mathfrak{S}_1$ ergibt. Abb. 12 liefert die einfache Lösung dieser Aufgabe für ein gegebenes Beispiel.

Abb. 12.

2. Zerlegung einer Kraft $\mathfrak{P}$ nach sechs gegebenen Raumgeraden. Für den allgemeinsten Fall dieser Aufgabe kam bisher wohl kaum eine andere Lösung in Betracht als die analytische: Aufstellung von drei Translations- und drei Momentengleichungen, zusammen sechs linearen Gleichungen für die sechs Unbekannten.

Das Korrekturprinzip lässt auch hier eine relativ leichte rein graphische Lösung zu. Es seien die sechs unbekannten Kräfte, nach denen $\mathfrak{P}$ zerlegt werden soll, mit $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots \mathfrak{S}_6$ bezeichnet.

Berücksichtigt man nur die Gleich-

gewichtsbedingung gegen Translation, so ist es immer möglich, eine Kraft nach drei beliebigen Richtungen im Raum zu zerlegen. Man betrachtet $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ als gegebene äussere Kräfte neben der wirklich gegebenen Kraft $\mathfrak{P}$ und zerlegt $\mathfrak{P}$ nach $\mathfrak{S}'_4$, $\mathfrak{S}'_5$, $\mathfrak{S}'_6$; desgleichen $\mathfrak{S}_1$ nach $\mathfrak{S}''_4$, $\mathfrak{S}''_5$, $\mathfrak{S}''_6$, sowie $\mathfrak{S}_2$ nach $\mathfrak{S}'''_4$, $\mathfrak{S}'''_5$, $\mathfrak{S}'''_6$ und $\mathfrak{S}_3$ nach $\mathfrak{S}''''_4$, $\mathfrak{S}''''_5$, $\mathfrak{S}''''_6$. Die Kontrollgleichung, die $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ aufzufinden gestattet, ist die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehung,

$$\Sigma\,\mathfrak{M} = 0$$

$$\text{oder } \Sigma\,\mathfrak{M}' + \Sigma\,\mathfrak{M}'' + \Sigma\,\mathfrak{M}''' + \Sigma\,\mathfrak{M}'''' = 0$$

$$\text{oder } \mathfrak{W}' + \mathfrak{W}'' + \mathfrak{W}''' + \mathfrak{W}'''' = 0.$$

$\mathfrak{W}' = \Sigma\,\mathfrak{M}'$ ist eine durch $\mathfrak{P}$ bestimmte Grösse, $\mathfrak{W}'' = \Sigma\,\mathfrak{M}''$, ebenso $\mathfrak{W}'''$ und $\mathfrak{W}''''$ sind proportional den unbekannten Kräften $\mathfrak{S}_1$ bezw. $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$. Die Zerlegung von $\mathfrak{W}'$ nach den drei Richtungen von $\mathfrak{W}''$, $\mathfrak{W}'''$, $\mathfrak{W}''''$ bestimmt diese und damit auch $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$, hernach durch Superposition $\mathfrak{S}_4$, $\mathfrak{S}_5$, $\mathfrak{S}_6$.

3. Räumliches Fachwerk. Für den Fall, dass die Stabspannungen eines nichteinfachen räumlichen Fachwerkes zu bestimmen sind, war im allgemeinen Fall neben der Methode der Knotenpunktsbedingungen bisher wohl nur das Verfahren der Stabvertauschung üblich. In verwickelteren Fällen wird die Lösung der Aufgabe langwierig. Nun ist ja allerdings der Begriff des „allgemeinen Falles“ der Diskussion ziemlich entrückt. In der Praxis gibt es der „allgemeinen Fälle“ wenige. Fast immer lässt sich mit Erfolg die nachfolgende Methode — ein Spezialfall der allgemeinen — anwenden, die etwas ausführlicher besprochen werden soll.

4. Flechtwerk. An den Knotenpunkten des in Abb. 13 skizzierten Flechtwerkes greifen an die irgendwie gegebenen Kräfte P_{I}, P_{II}, ... P_{VII}, in der Zeichnung kurz mit I, II, ... VII bezeichnet. Sie können unmittelbar gegeben sein als äussere Kräfte oder entstanden als die Resultierenden der an diesen Knotenpunkten angreifenden äusseren Kräfte und der bereits ermittelten Spannungen der nach obenhin das Flechtwerk fortsetzenden Stäbe. Letztere sind in der Abbildung weggelassen. Von den Stäben 1, 2, ... n muss man nicht, so

wie die Abbildung angibt, annehmen, dass sie in einer Ebene liegen; auch regulär muss das Fachwerk nicht sein. Die nachfolgende Ueberlegung verliert keineswegs an Allgemeinheit der Entwicklung durch den spezialisierten Fall der Abbildung.

Der Gedankengang, den das Korrekturprinzip hier einschlägt, ist folgender: Wenn an einem Knotenpunkt nur zwei unbekannte Kräfte S_k und S_l angreifen, so kann man nach Wahl entweder im Grundriss oder im Aufriss die Zerlegung der bekannten Kraft S_i nach diesen beiden unbekannten Kräften S_k und S_l vornehmen. Betrachtet man nun die Ringspannungen S_1, S_2, ... S_n als gegebene äussere Kräfte, dann greifen tatsächlich an jedem Knotenpunkt nur je zwei unbekannte Kräfte an, die durch einfache Zerlegung im Grundriss oder im Aufriss zu ermitteln sind. Es werden sich also die Spannungen der Stäbe $n + 1$, $n + 2$, ... superponieren aus den durch die wirklich gegebenen Kräfte P herrührenden Beiträgen und denjenigen durch die gegeben gedachten Kräfte S_1, S_2, ... S_n.

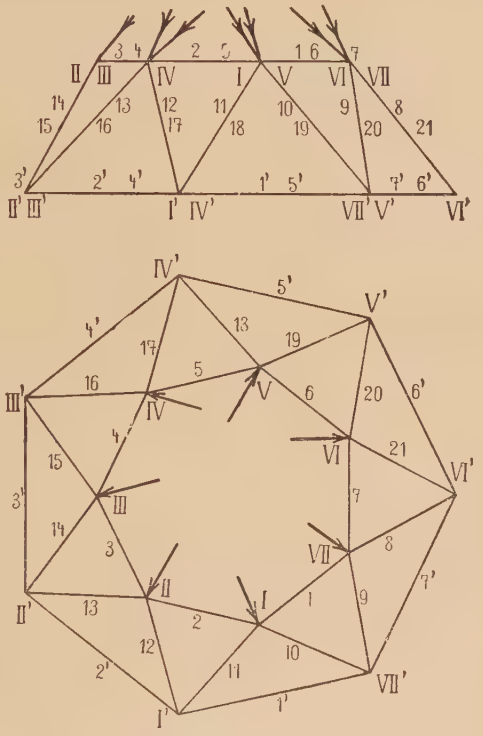

Abb. 13.

Erfolgt die Zerlegung der wirklich oder vorausgesetzt gegebenen Kräfte am Knoten i im Grundriss, so muss jedesmal

die Tatsache des Gleichgewichts dieses Knotens i im Aufriss wie unter 1 eine Kontrollgleichung geben: also n Gleichungen für die n Unbekannten $S_1, S_2, \ldots S_n$. Abb. 14 gibt diese Kontrolle und ihre Entstehung

$$W_{\mathrm{I}} + W'_{\mathrm{I}} + W''_{\mathrm{I}} = 0$$

für den Knoten I wieder. Es ist

$$W'_{\mathrm{I}} = \varkappa_{\mathrm{I}} S_1, \; W''_{\mathrm{I}} = \lambda_{\mathrm{I}} S_2,$$

also

(8) $$W_{\mathrm{I}} + \varkappa_{\mathrm{I}} S_1 + \lambda_{\mathrm{I}} S_2 = 0.$$

Für den zweiten Knotenpunkt hat man entsprechend

$$W_{\mathrm{II}} + \varkappa_{\mathrm{II}} S_2 + \lambda_{\mathrm{II}} S_3 = 0,$$

ebenso für die übrigen Knotenpunkte.

Abb. 14.

Dabei sind die $\varkappa$ und λ aus der Konstruktion zu entnehmende Zahlen, die W aber durch die äusseren Kräfte bestimmt. Natürlich sind die $\varkappa$ und λ von der Belastung unabhängige Konstante.

Die Spannungen $S_2, \ldots S_n$ kann man durch die ersten $n - 1$ Kontrollgleichungen leicht nach S_1 ausdrücken. Der letzte Knotenpunkt liefert dann mit

$$W_n + \varkappa_n S_n + \lambda_n S_1 = 0$$

S_1 und damit die übrigen $S_2 \ldots S_n$.

5. In den praktisch vorkommenden Fällen gestalten sich diese Gleichungen äusserst einfach. Für den Fall der regelmässigen Netzwerkkuppel der Abb. 13 sind alle $\varkappa$ und λ einander gleich,

(9) $$\varkappa = \varkappa_{\mathrm{I}} = \ldots \quad \varkappa_n = \lambda_{\mathrm{I}} = \ldots \lambda_n = \lambda,$$

so dass aus den Kontrollgleichungen (8) wird

$$W_{\mathrm{I}} + \varkappa (S_1 + S_2) = 0,$$
$$W_{\mathrm{II}} + \varkappa (S_2 + S_3) = 0,$$
$$\text{— — — — — — — —}$$
$$W_{\mathrm{VII}} + \varkappa (S_7 + S_1) = 0,$$

woraus sich ergibt

$$
\begin{aligned}
-2\varkappa S_1 &= W_{\mathrm{I}} - W_{\mathrm{II}} + W_{\mathrm{III}} - W_{\mathrm{IV}} + W_{\mathrm{V}} - W_{\mathrm{VI}} + W_{\mathrm{VII}},\\
-2\varkappa S_2 &= W_{\mathrm{II}} - W_{\mathrm{III}} + W_{\mathrm{IV}} - W_{\mathrm{V}} + W_{\mathrm{VI}} - W_{\mathrm{VII}} + W_{\mathrm{I}},\\
&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-2\varkappa S_7 &= W_{\mathrm{VII}} - W_{\mathrm{I}} + W_{\mathrm{II}} - W_{\mathrm{III}} + W_{\mathrm{IV}} - W_{\mathrm{V}} + W_{\mathrm{VI}}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Die W sind graphisch leicht auffindbar und damit nach Berechnung der $S_1, S_2, \ldots S_7$ mit einem einfachen ebenen Kräfteplan im Grundriss oder im Aufriss alle übrigen Stabspannungen des untersuchten Stockwerkes: $S_8, S_9, \ldots\ldots S_{21}$. Die Aufgabe, die Spannungen einer symmetrischen Netzwerkkuppel aufzusuchen, findet so eine recht einfache Lösung. Es ist nur notwendig, im Grundriss die Kräfte $P_{\mathrm{I}}, P_{\mathrm{II}}, \ldots P_{\mathrm{VII}}$ je nach den Spannungen der beiden Füllungsstäbe zu zerlegen und im Aufriss je das Kontrollpolygon zu zeichnen, woraus sich $W_{\mathrm{I}}, W_{\mathrm{II}}, \ldots W_{\mathrm{VII}}$ ergeben. $\varkappa$ lässt sich wie in Abb. 14 an einem Kontrollpolygon für die Zerlegung einer Ringstabspannung ablesen. Dann liefern die Gleichungen (10) unmittelbar die Stabspannungen $S_1, S_2, \ldots S_7$ und mit ihnen die übrigen $S_8, \ldots S_{21}$. Man hat sich gar nicht um die Ebenen zu kümmern, in denen die Kräfte vorkommen, also auch um keine Schnitte von solchen.

[Nach den vorausgehenden Bemerkungen in § 4 glaube ich plausibel gemacht zu haben, dass die geometrische Aufgabe, den Schnitt zweier Ebenen aufzufinden, auch als statische Aufgabe betrachtet werden kann. Das ist der tiefere Grund, warum in der eben besprochenen Aufgabe Schnitte von Kraftebenen nicht vorkommen.]

Abb. 13 stellt ein Stockwerk einer symmetrischen Netzwerkkuppel mit sieben Ringstäben dar. An den Knotenpunkten I, II, ... VII greifen die irgendwie gegebenen Kräfte P_{I}, $P_{\mathrm{II}}, \ldots P_{\mathrm{VII}}$ an. Abb. 15, *K. M.* 1 *mm* = 40 *kg*, gibt die Ermittlung der $W_{\mathrm{I}}, W_{\mathrm{II}}, \ldots W_{\mathrm{VII}}$ an, sowie die von $\varkappa$ durch W'_{II}. Die gegebenen Kräfte sind stark ausgezogen, die W_{I}, $W_{\mathrm{II}}, \ldots W_{\mathrm{VII}}$ stark gestrichelt und mit Pfeilen versehen, das strichpunktierte Polygon am linken Ende der Abbildung gibt die Entwicklung von W'_{II} und damit von $\varkappa$ wieder:

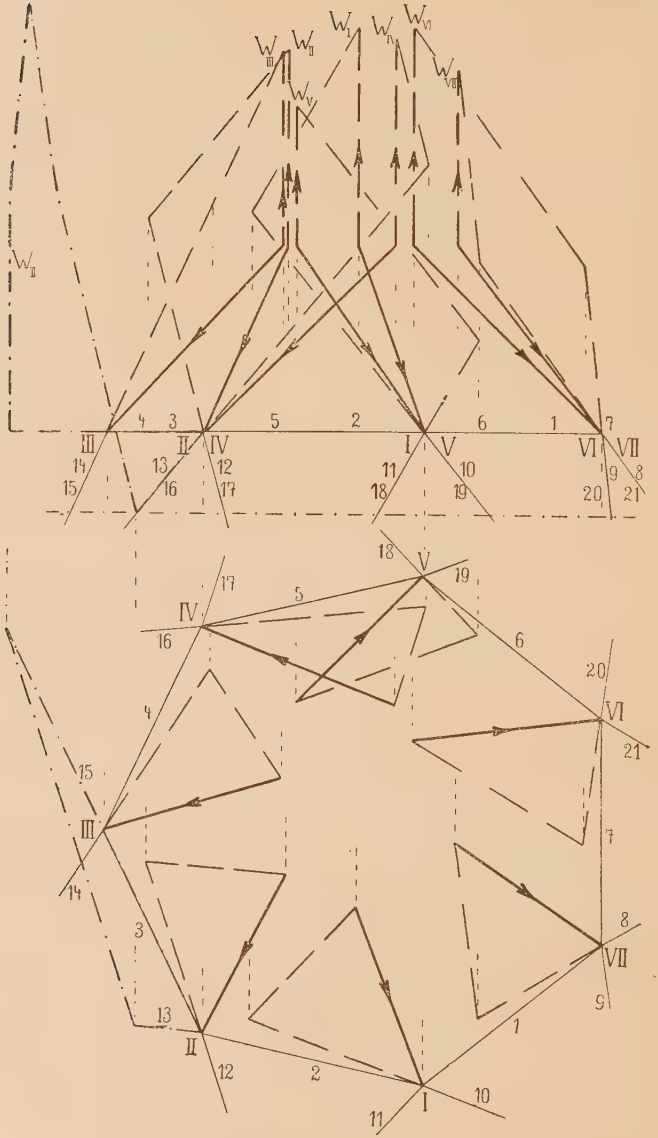
W
W
W
W
W
W
W
W
W
III
II
IV
I
V
VI
VII
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21

Abb. 15.

S_3, als Zug angenommen, ist im Grundriss gleich der doppelten Länge des Stabes 3 gewählt und dann nach den Span-

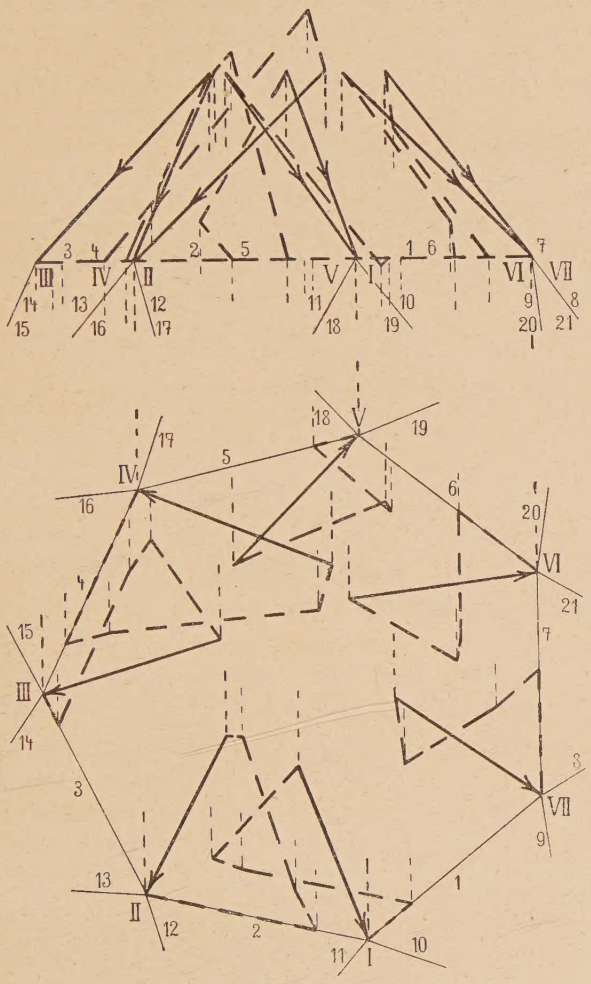

Abb. 16.

nungen der Stäbe 12 und 13 zerlegt worden. Nach (8) ist

$$W'_{II} = \varkappa S_3,$$

woraus sich $\varkappa = -0{,}95$ ergibt. Mit der Annahme der P_i, so wie

Abb. 15 angibt, erhält man

$$W_{\mathrm{I}} = 1{,}15,\ W_{\mathrm{II}} = 1{,}04,\ W_{\mathrm{III}} = 1{,}04,\ W_{\mathrm{IV}} = 1{,}09,$$
$$W_{\mathrm{V}} = 0{,}73,\ W_{\mathrm{VI}} = 1{,}15,\ W_{\mathrm{VII}} = 0{,}94$$

und daraus

$$S_1 = 0{,}3,\ S_2 = 0{,}91,\ S_3 = 0{,}19,\ S_4 = 0{,}91,$$
$$S_5 = 0{,}24,\ S_6 = 0{,}54,\ S_7 = 0{,}68.$$

Der Kräfteplan der Abb. 16, *K. M.* 1 *mm* = 40 *kg*, stellt dann Grund- und Aufriss sämtlicher Spannungen des untersuchten Stockwerkes dar.

6. Für $\varkappa$ lässt sich elementar-geometrisch die Formel aufstellen

$$\varkappa g = -\,h \sin \frac{2\pi}{n}, \tag{11}$$

wenn n die Anzahl der Ringstäbe bedeutet, g, h die in Abb. 17 dargestellten Grössen. Durch zwei am nämlichen Knoten i angreifende Füllungsstäbe ist ein Dreieck bestimmt, dessen Höhe g als Horizontal- und h als Vertikalprojektion hat. $\varkappa$ ist gegeben durch die Formel (8)

$$W'_{\mathrm{I}} = \varkappa_{\mathrm{I}}\, S_1,$$

also durch die Kontrolle beim Kräftedreieck für die Zerlegung von S_1 nach den Spannungen der Füllungsstäbe. Statt S_1 unmittelbar nach diesen beiden Spannungen zu zerlegen, wird man besser die Tangentialkomponente T und die Radialkomponente R von S_1 darnach zerlegen. Die erste T gibt naturgemäss, da sie ja mit den Spannungen der Füllungsstäbe $n + 1$ und $n + 2$ in der gleichen Ebene liegt, die Korrektur Null, die zweite,

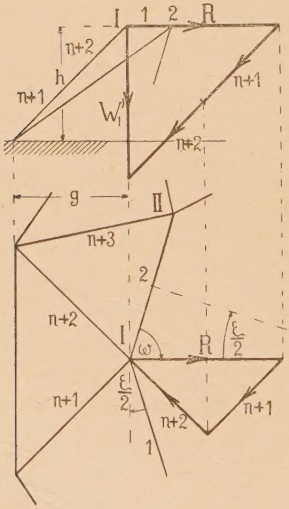

Abb. 17.

$$R = S_1 \sin {}^1/_2\zeta,$$

mit $\zeta = 2\pi : n$ (Abb. 17), liefert die Korrektur

$$W'_{\mathrm{I}} = -R\frac{h}{g}$$
$$= -S_1 \cdot \frac{h}{g} \cdot \sin\frac{\zeta}{2}$$
$$= \varkappa S_1,$$

woraus

$$\varkappa g = -h \sin {}^1/_2\zeta. \tag{11}$$

7. Für eine Schwedlerkuppel gestaltet sich die Berechnung bedeutend einfacher. Im allgemeinen Fall, also für eine unsymmetrische Kuppel mit n Ringstäben, wird bereits

$$\lambda_{\mathrm{I}} = \lambda_{\mathrm{II}} = \ldots = \lambda_n = 0, \tag{12}$$

so dass die Gleichungen (8) die Form annehmen

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{I}} + \varkappa_{\mathrm{I}} S_1 &= 0, \\ W_{\mathrm{II}} + \varkappa_{\mathrm{II}} S_2 &= 0 \text{ usw.} \end{aligned} \tag{13}$$

Die Spannung S_i ist also nur abhängig von der Last P_i, die am Knoten i angreift. Dabei ist vorausgesetzt, dass am Knoten i der angreifende Diagonalstab und der Ringstab $i-1$ mit dem Sparrenstab in der nämlichen Ebene liegen; weshalb ja auch λ_i verschwindet.

Für die symmetrische Schwedlerkuppel werden auch die $\varkappa_i$ einander gleich,

$$\varkappa_{\mathrm{I}} = \varkappa_{\mathrm{II}} = \ldots = \varkappa_n = \varkappa, \tag{14}$$

so dass also die Gleichungen (13) übergehen in

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{I}} + \varkappa S_1 &= 0, \\ W_{\mathrm{II}} + \varkappa S_2 &= 0 \text{ usw.} \end{aligned} \tag{15}$$

Damit hat man eine äusserst einfache Regel für die Bestimmung der Spannungen der Ringstäbe.

8. Für $\varkappa$ lässt sich wieder eine geometrische Formel aufstellen. Wie bei der Netzwerkkuppel, so findet man $\varkappa$ auch hier durch die Kontrolle beim Kräftedreieck für die Zerlegung von S_1 nach den Spannungen des Diagonal- bezw. Sparrenstabes. Die Skizze der Abb. 18 gibt die Entstehung von W'_{I} wieder, wo S_1 im Grundriss nach S_{n+1} und S_{2n+1} zerlegt und im Aufriss die Korrektur

$$W'_{\mathrm{I}} = \varkappa S_1$$

gewonnen wird. Zerlegt man S_1 zuvor in zwei Komponenten

tangential und normal zur Richtung des andern am gleichen Knotenpunkt angreifenden Ringstabes, so wird die erste Komponente die Korrektur Null geben, da sie ja mit der Diagonal- und Sparrenstabspannung in der gleichen Ebene liegt, die zweite,

$$R = S_1 \cos \omega = S_1 \sin \zeta,$$

mit $\zeta = 2\pi : n$ (Abb. 18) die Korrektur

$$W_I = - R \frac{h}{g}$$

$$= - S_1 \frac{h}{g} \sin \zeta$$

$$= \varkappa S_1,$$

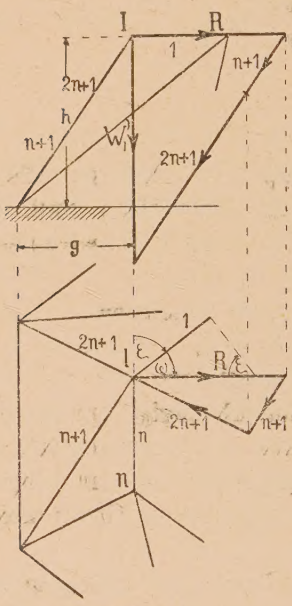

Abb. 18.

woraus

$$g \varkappa = - h \sin \zeta, \tag{16}$$

entsprechend wie bei der Netzwerkkuppel gewonnen wird. Dabei ist g die Horizontal-, h die Vertikalprojektion der Höhe des Trapezfaches, n die Anzahl der Ringstäbe.

Bemerkt sei noch, dass die Formeln (8) bis (16) für $\varkappa$, λ usw. noch zu interessanten Ueberlegungen über die Grösse und Variabilität der Stabspannungen Anlass geben.